Corrigés des exercices du livret
2^{nde} / $1^{ère}$ Spécialité Mathématiques

IREM de Clermont-Ferrand – Groupe Aurillac-Lycée

1 Symboles $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$

Ex 1

1- 1361 personnes
2- Chômeurs ; C ; 2812 ; $F \subset C$
3- Hommes au chômage ayant entre 25 et 49 ans ; 816 personnes
4- Femmes de plus de 15 ans au chômage ou personnes au chômage entre 50 et 64 ans. 1633 personnes.
5- Hommes de plus de 15 ans au chômage. 1451.
6- Personnes au chômage de plus de 25 ans. 2154 personnes.

Ex 2

1- $\in$; $\notin$; $\subset$; $\notin$
2- $x \in [\,1 ; 2[$ et $[1 ; 2[\, \subset R$
3- $\subset$
4- $[1 ; 2[$
5- $[\,0 ; 3[$
6- Disjoints
7- $]-\infty ; 4]$
8- $]-\infty ; 1[\, \cup [3 ; +\infty[$; idem
9- $]-\infty ; -1]$

Ex 3

1 a- $2x(-1) + 1 = -1$ donc $A \in D1$
b- $-(-1)+ 3 = 4 \neq -1$ donc $A \notin D2$
c- $D1 \cap D2 = \{B\}$ avec B (2/3 ; 7/3), résoudre 2x+1=-x+3
2- $F \ldots \notin (EGB)$
a- $(FG) \subset (FBC)$
b- $(EHB) \cap (ABD) = (BC)$
c- $(EHB) \cap (FG) = \varnothing$
d- $(HD) \cap (ABC) = \{D\}$

2 Calcul numérique

EXERCICE 4

$$A = \frac{17}{40} \qquad B = \frac{13}{4} \qquad C = \frac{644}{45} \qquad D = \frac{3}{7}$$
$$E = -\frac{9}{32} \qquad F = -\frac{1}{8}$$

EXERCICE 5

$$A = 2 \qquad B = 3^{11} = 177\,147 \qquad C = (-4)^{-4} = \frac{1}{256}$$
$$D = 5^{-15} = \frac{1}{30\,517\,578\,125} \qquad E = -1 \qquad F = 200\,000$$

EXERCICE 6

1. $A = 3\sqrt{2} \qquad B = 10\sqrt{2} \qquad C = 5\sqrt{5} \qquad D = \sqrt{2} \qquad E = 0$
2. $\dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

EXERCICE 7

1. $A = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $B = 1$, $C = \pi - 3$.
2. $|x-3| \leqslant 2 \iff x \in [1;5]$
   $|x-5| \leqslant 1 \iff x \in [4;6]$
   $|x+1| \leqslant 2 \iff x \in [-3;1]$
3. **a.** $|x-4| = 7 \iff x = -3$ ou $x = 11$
   $|x-2| = 0 \iff x = 2$
   $|x+2| = 3 \iff x = -5$ ou $x = 1$
   $|x-5| = -1$: impossible, pas de solution.

EXERCICE 8

1. **a.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.
   b. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{1\times(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{1} = 2+\sqrt{3}$.
   c. $\dfrac{1}{\sqrt{7}+1} = \dfrac{1\times(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}^2-1^2} = \dfrac{\sqrt{7}-1}{6}$.
2. $A = \dfrac{3}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}^2-1^2} = \dfrac{3(\sqrt{5}-1)}{4}$.
3. $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{1\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}^2-\sqrt{3}^2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

EXERCICE 9

$$A = 1 - (-1) = 2 \qquad B = \frac{12}{10} = 1,2$$
$$C = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{8}} \times \frac{\cancel{8}}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{\cancel{10}} = \frac{1}{10}$$

3 Calcul littéral

Ex 10 :

$A = 2(3x-1)^2 - (5x+3)(2-3x)$

$A = 2(9x^2 - 6x + 1) - (10x - 15x^2 + 6 - 9x)$

$A = 18x^2 - 12x + 2 - 10x + 15x^2 - 6 + 9x.$

$\mathbf{A = 33x^2 - 13x - 6.}$

A toi de jouer:

$B = (2x-9)(3-2x) + 5(2x+1)^2 = 6x - 6x^2 - 27 + 18x + 5(4x^2 + 4x + 1) =$ $\mathbf{14x^2 + 44x - 22}$ **.**

$C = 4(x-6)^2 - 3(5x+3)(5x-3) = 4(x^2 - 12x + 36) - 3(25x^2 - 9) = 4x^2 - 48x + 144 - 75x^2 + 27$
$= \mathbf{-71x^2 - 48x + 171}$ **.**

Ex 11:

Exemple guidé :

$A = 6x + 3 + 4(2x+1)^2$

$A = 3\underline{(2x+1)} + 4\underline{(2x+1)}^2$

$A = (2x+1)[3 + 4(2x+1)]$

$A = (2x+1)[3 + 8x + 4]$

$\mathbf{A = (2x+1)(8x+7)}$

Exemple guidé :

$A = 36x^2 - (5x+1)^2$

$A = (6x)^2 - (5x+1)^2$

$A = [(6x) + (5x+1)][(6x) + (5x+1)]$

$A = [6x + 5x + 1][6x - 5x - 1]$

$\mathbf{A = (11x+1)(x-1)}$

A toi de jouer:

$B = 2(5x-1)^2 + 10x - 2$
$B = 2(5x-1)^2 + 2(5x-1)$
$B = (5x-1)[2(5x-1) + 2]$
$B = (5x-1)(10x)$
$\mathbf{B = 10x(5x-1)}$

$C = (x^2 - 4) + (x+2)^2$
$C = (x-2)(x+2) + (x+2)^2$
$C = (x+2)[(x-2) + (x+2)]$
$C = (x+2)(2x)$
$\mathbf{C = 2x(x+2)}$

A toi de jouer:

$B = (4x-3)^2 - 25x^2$
$B = (4x-3)^2 - (5x)^2$
$B = [(4x-3) - (5x)][(4x-3) + (5x)]$
$\mathbf{B = (-x-3)(9x-3)}$

$C = 49 - (5x+2)^2$
$C = [7 - (5x+2)][7 + (5x+2)]$
$\mathbf{C = (-5x+5)(5x+9)}$

Ex 12 :

Exemple guidé :

$A = 4 + \frac{3}{x+2}$ (Cette expression existe si et seulement si $x + 2 \neq 0$ soit $x \neq 2$ (<u>valeur interdite pour</u> A))

$A = \frac{4\times(x+2)}{x+2} + \frac{3}{x+2}\ \frac{4x+8}{x+2} + \frac{3}{x+2} = \mathbf{\frac{4x+11}{x+2}}$

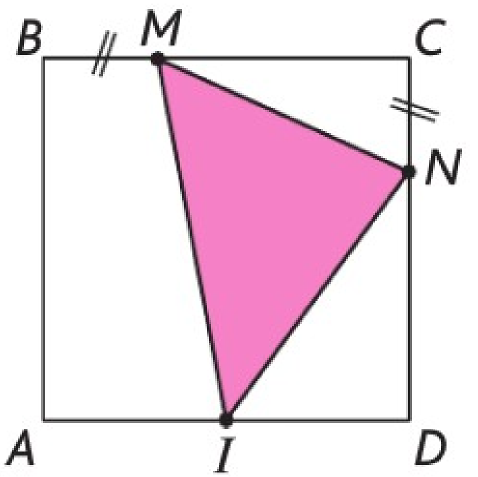
A toi de jouer:

B = $\frac{2x}{3x-1} - 5 = \frac{2x}{3x-1} - \frac{5(3x-1)}{3x-1} = \frac{2x-15x+5}{3x-1} = \boldsymbol{\frac{-13x+5}{3x-1}}$ (VI : $x = \frac{1}{3}$)

C = $\frac{4}{2x+6} - \frac{3}{x-5} = \frac{4(x-5)}{2x+6} - \frac{3(2x+6)}{x-5} = \frac{4x-20-6x-18}{x-5} = \boldsymbol{\frac{-2x-38}{x-5}}$ (VI : x = 5)

Exercice 13 :

ABCD est un carré de côté 6 cm. I est le milieu de [AD] .
M est un point de BC] et N un point de [CD] tels que BM = CN = x .
Exprimer en fonction de x l'aire du triangle IMN.



A_{IMN} = A_{ABCD} – (A_{MCN} + A_{DIN} + A_{ABMI})

$= c^2 - \left(\frac{CM \times CN}{2} + \frac{DI \times DN}{2} + \frac{(BM+AI) \times AB}{2} \right)$

$= 36 - \left(\frac{x(6-x)}{2} + \frac{3(6-x)}{2} + \frac{(x+3)6}{2} \right)$

$= 36 - \left(\frac{6x-x^2+18-3x+6x+18}{2} \right)$

$= 36 - \left(\frac{-x^2+9x+36}{2} \right)$

$= \frac{72+x^2-9x-36}{2}$

$= \frac{x^2-9x+36}{2}$

4 Équations

EXERCICE 14

a) $\mathcal{S}=\left\{\frac{11}{5}\right\}$; b) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{5}\right\}$; c) $\mathcal{S}=\left\{\frac{7}{6}\right\}$; d) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$; e) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$; f) $\mathcal{S}=\{-3\}$

EXERCICE 15

1. Bob doit avoir 17,5 au dernier devoir.
2. Inconnue : soit x la longueur d'un côté autre que la base.
   Equation : $2x+(x-21)=87$
   Solutions : $\mathcal{S}=\{36\}$
   Conclusion : Les côtés du triangle mesurent 36, 36 et 15 $(36-21)$ centimètres.
3. Inconnue : soit x la durée de la vie de Diophante, en années.
   Equation : $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$
   Solutions : $\mathcal{S}=\{84\}$
   Conclusion : Diophante a vécu 84 ans.

EXERCICE 16

a) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ b) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{14}\right\}$ c) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ d) $\mathcal{S}=\left\{-\frac{25}{3}\right\}$ e) $\mathcal{S}=\left\{\frac{5}{6}\right\}$ f) $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{4}\right\}$

Exercice 17 :

1- $(5x - 1)(x - 9) - (x - 9)(2x - 1) = 0$
$(x - 9)[5x - 1 - (2x - 1)] = 0$
$(x - 9)(3x) = 0$
d'où $x - 9 = 0$ ou $3x = 0$
$x = 9$ $x = 0$

2- $\frac{3x-1}{x-5} = \frac{3x-4}{x}$
$(3x - 1)x = (3x - 4)(x - 5)$
$3x^2 - x = 3x^2 - 19x + 20$
$18x = 20$
d'où $x = \frac{10}{9}$

3- $\frac{16x^2-25}{2x-3} = \frac{4x-5}{3}$
$3(16x^2 - 25) = (4x - 5)(2x - 3)$
$3(4x + 5)(4x - 5) = (4x - 5)(2x - 3)$
$(4x - 5)[12x + 15 - (2x - 3)] = 0$
$(4x - 5)(10x + 18) = 0$
d'où $4x - 5 = 0$ ou $10x + 18 = 0$
$x = \frac{5}{4}$ $x = \frac{9}{5}$

4- $2(x - 1)(x - 3{,}5) = 4x^2 - 28x + 49$
$2(x - 1)(x - 3{,}5) = (2x - 7)^2$
$2(x - 1)(x - 3{,}5) = 4(x - 3{,}5)^2$
$(x - 3{,}5)[2x - 2 - 4(x - 3{,}5)] = 0$
$(x - 3{,}5)(-2x + 10) = 0$
d'où $x - 3{,}5 = 0$ ou $-2x + 10 = 0$
$x = 3{,}5$ $x = 5$

5- $\frac{x^2-3x}{(x-3)^2} = 4$
$x^2 - 3x = 4(x - 3)^2$
$x(x - 3) = 4(x - 3)^2$
$(x - 3)[x - 4(x - 3)] = 0$
$(x - 3)(-3x + 12) = 0$
d'où $x - 3 = 0$ ou $-3x + 12 = 0$
$x = 3$ $x = 4$

Exercice 18 :

1-a- $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$
b- $x^2 + 2x - 8 = 0$
$(x + 1)^2 - 1 - 8 = 0$
$(x + 1)^2 - 9 = 0$
c- $(x + 1 + 3)(x + 1 - 3) = 0$
$(x + 4)(x - 2) = 0$
d'où $x + 4 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = -4$ $x = 2$

2- $x^2 + 12x + 11 = 0$
$(x + 6)^2 - 36 + 11 = 0$
$(x + 6)^2 - 25 = 0$
$(x + 6 + 5)(x + 6 - 5) = 0$
$(x + 11)(x + 1) = 0$
d'où $x + 11 = 0$ ou $x + 1 = 0$
$x = -11$ $x = -1$

5 Inéquations de base

EXERCICE 19

1. $\mathcal{S} = \left]-\infty; \frac{5}{7}\right[$; 2. $\mathcal{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$; 3. $\mathcal{S} =]-6; +\infty[$; 4. $\mathcal{S} =]-\infty; -3]$; 5. $\mathcal{S} = \left]-\frac{13}{4}; +\infty\right[$; 6. $\mathcal{S} = \left[\frac{10}{3}; +\infty\right[$.

EXERCICE 20

1. Soit x la longueur recherchée. On a $2(12+x) \geqslant 41$ et $12x \leqslant 111$. On en déduit que $x \geqslant 8,5$ et $x \leqslant 9,25$ et donc $x = 9$.
2. Soit x le nombre de places achetées. L'énoncé se traduit par l'inéquation $5,25x + 27 \leqslant 7,5x$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [12; +\infty[$. L'abonnement est donc avantageux à partir de 12 places achetées.
3. Soit x le nombre de Kw/h consommés. On cherche à déterminer quand le contrat de la société Grostricité est plus avantageux que l'autre contrat. Cela conduit à l'inéquation $32 + 1,13x \leqslant 14 + 1,72x$. L'ensemble des solutions de cette inéquation est $\mathcal{S} = \left[\frac{1800}{59}; +\infty\right[$ avec $\frac{1800}{59} \approx 30,5$. Le contrat de Grostricité est donc plus avantageux si l'on consomme plus de environ 30,5 Kw/h par mois.

6 Inéquations et tableaux de signes

Exercice 21 : 1-

x	$-\infty$		$3{,}5$		4		$+\infty$
$-3x + 12$		$+$		$+$	0	$-$	
$7 - 2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2- $P(x) \geq 0$: $S =]-\infty ; 3{,}5] \cup [4 ; +\infty[$

$P(x) < 0$: $S =]3{,}5 ; 4[$

Exercice 22 : 1- $(3x + 2)^2 - (3x + 2)(5x + 1) \leq 0$

$(3x + 2)(-2x + 1) \leq 0$

x	$-\infty$		$-2/3$		$1/2$		$+\infty$
$3x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$-2x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -2/3] \cup [1/2 ; +\infty[$

2- $(2 - x)^2 > 36$

$(2 - x)^2 - 36 > 0$

$(2 - x + 6)(2 - x - 6) > 0$

$(-x + 8)(-x - 4) > 0$

x	$-\infty$		-4		8		$+\infty$
$-x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$-x - 4$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -4[\cup]8 ; +\infty[$

Exercice 23 : 1- $y = 20 - x$

2- $x\,y \geq 91$

$x(20 - x) \geq 91$

$-x^2 + 20x - 91 \geq 0$

et $(7 - x)(13 - x) \leq 0$

$x^2 - 20x + 91 \leq 0$

$-x^2 + 20x - 91 \geq 0$

3-

x	$-\infty$		7		13		$+\infty$
7 - x		+	0	-		-	
13 - x		+		+	0	-	
P(x)		+	0	-	0	+	

$S = [\,7\,;\,13]$

Ex 24 :

1-

x	$-\infty$		-4		1,5		$+\infty$
(-2x+3) / (x+4)		-	||	+	0	-	

2- Q(x)≥0 pour x∈]-4 ; 1,5]

Q(x)≤0 pour x∈]∞+;U[1,5]4-;∞-[

Ex 25 :

1- S=[-17/5 ; -3[

2-]∞+;S=]0,5; 47/13]U]5

Exercice 26 :

1- $\dfrac{x^2 - 16}{9 - 4x^2} \geq 0$

$\dfrac{(x+4)(x-4)}{(3+2x)(3-2x)} \geq 0$

x	$-\infty$		-4		-3/2		3/2		4		$+\infty$
x + 4		-	0	+		+		+		+	
x – 4		-		-		-		-	0	+	
3 + 2x		-		-	0	+		+		+	
3 - 2x		+		+		+	0	-		-	
Q(x)		-	0	+	||	-	||	+	0	-	

$S = [-4\,;\,-3/2[\;U\;]3/2\,;\,4]$

2- $\frac{2x+3}{x+1} \leq \frac{x+1}{2x+3}$

$\frac{2x+3}{x+1} - \frac{x+1}{2x+3} \leq 0$

$\frac{(2x+3)^2-(x+1)^2}{(x+1)(2x+3)} \leq 0$

$\frac{(2x+3+x+1)(2x+3-x-1)}{(x+1)(2x+3)} \leq 0$

$\frac{(3x+4)(x+2)}{(x+1)(2x+3)} \leq 0$

x	- ∞ -2 -3/2 -1 -4/3 +∞
3x + 4	- - - - 0 +
x + 2	- 0 + + + +
x+1	- - - 0 + +
2x+3	- - 0 + + +
P(x)	+ 0 - ‖ + ‖ - 0 +

S = [-2 ; -3/2[U]-1; -4/3]

7 Géométrie

EXERCICE 27

Remarques

✍ Toutes les longueurs doivent être calculées de façon exacte à l'aide de la formule $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

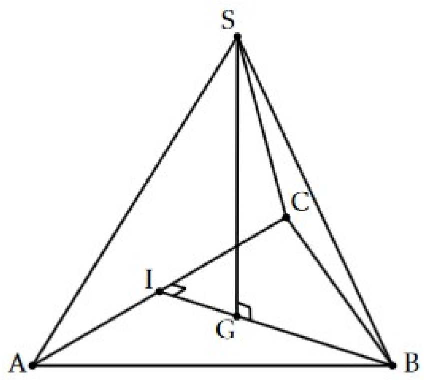
✍ Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont : $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

1. Figure
2. $F(2;1)$
3. $AF = HF = FM = 5$ donc les points A, H et M sont sur un même cercle $\mathcal{C}$ de centre F et de rayon 5.
4. Les triangles MAT et MHT sont inscrits dans le cercle $\mathcal{C}$ et ont un de leur côté pour diamètre : ce sont donc des triangles rectangles, respectivement en A et en H.
5. Coordonnées du milieu I du segment $[AH]$: $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$.
   Les diagonales du quadrilatère $MATH$ ne se coupent pas en leur milieu : ce n'est donc pas un parallélogramme. A fortiori, ce n'est pas un carré.
6. On additionne les aires de deux triangles rectangles.
   $\mathcal{A}_{MATH} = \mathcal{A}_{MAT} + \mathcal{A}_{MTH} = \frac{MA \times AT}{2} + \frac{MH \times MT}{2} = 25 + 24 = 49.$

<u>Exercice 28</u>

Le but de l'exercice est en fait de calculer la hauteur SG.

Voici un schéma tout à fait propice à la résolution d'un tel problème.



Déterminons, dans l'ordre, les longueurs BI, puis BG et enfin SG.

Le triangle BIA est rectangle en I donc d'après le théorème de Pythagore :

$BA^2 = BI^2 + IA^2$

donc $BI^2 = BA^2 - IA^2$

donc $BI^2 = 10^2 - 5^2$

donc $BI^2 = 100 - 25 = 75$ donc $BI = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$

Pour la longueur BG, il faut se rappeler que, dans une pyramide régulière, le pied de la hauteur est aussi le centre de gravité de la base. Or, dans un triangle, le centre de gravité est situé au tiers de chacune des trois médianes, en partant de la base, soit encore aux deux tiers de chacune des trois médianes, en partant du sommet.

Ainsi, $BG = \frac{2}{3} BI = \frac{2}{3} \times 5 \times \sqrt{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}$

Enfin, le triangle BGS étant rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore :

$BS^2 = BG^2 + GS^2$

donc $GS^2 = BS^2 - BG^2$

donc $GS^2 = 10^2 - (\frac{10}{3}\sqrt{3})^2$

donc $GS^2 = 100 - \frac{100}{9} \times 3$

donc $GS^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{300}{3} - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$

donc $GS = \sqrt{\frac{200}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 100}{3}} = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$

Ainsi, la hauteur de cette pyramide est $\boxed{\mathbf{10\sqrt{\frac{2}{3}}\ cm}}$ soit environ 8,2 cm.

8 Équations de droites et systèmes

Exercice 29

VRAI/FAUX : Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses.

Soit Δ la droite d'équation y = 5x + 3.

1). Le point C(-2 ; 7) appartient à la droite Δ si et seulement si les coordonnées de C vérifient l'équation de la droite . Or, $5\times(-2) + 3 = -7 \neq 7$. Donc $C \notin \Delta$. L'affirmation est donc fausse.

2). La droite Δ' a pour coefficient directeur de Δ' est égal à 3, celui de Δ est égale à 5. Or $3 \neq 5$, donc l'affirmation est fausse.

3). $5\times(-2,5) + 3 = -9,5$. Donc $D \in \Delta$. De plus, $3\times(-2,5) - 2 = -9,5$. Donc $D \in \Delta'$. L'affirmation est donc vraie.

4). Le coefficient directeur de d est positif, car la droite « monte ». L'affirmation est donc fausse.

5). La droite d' est horizontale et passe par le point de coordonnées (0 ; 2). L'affirmation est donc vraie.

6). La droite d passe par les points de coordonnées (0 ; -3) et (1 ; -1). L'affirmation est donc vraie.

7). La droite d' est horizontale donc son coefficient directeur est égal à 0. L'affirmation est donc fausse.

8). La droite d' ne passe pas par l'origine du repère donc l'affirmation est fausse .

9). « On avance de 1 horizontalement et descend de 2 ». L'affirmation est donc vraie.

10). Le coefficient directeur de d'' est égal à -2 d'après le schéma. Donc l'affirmation est fausse.

Exercice 30 :

1). Tout d'abord, vérifions que la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées (ou verticale).

On remarque que $y_A \neq y_B$. Donc (AB) admet une équation de la forme y = mx + p.

Déterminons son coefficient directeur m = $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{-2-4} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2}$ (ou -0,5). D'où (AB) : y = -0,5x + p.

Déterminons son ordonnée à l'origine p, en remplaçant x et y par les coordonnées de A(4 ; 1), point de la droite :

$1 = -0,5\times4 + p$ ssi $-2 + p = 1$ ssi $p = 3$. D'où <u>(AB) : y = -0,5x + 3.</u>

2). Sur Geogebra.

EXERCICE 31

1. $(AB) : -x + 4y - 7 = 0$
2. $(d) : -x + 4y + 4 = 0$
3. $M(-1,5; 0)$
4. $(BM) : 2x - 2,5y + 3 = 0$
5. $D(-4; -2)$
6. $ABCD$ est un parallélogramme. On vérifie par exemple, par un calcul de coordonnées, que M est aussi le milieu du segment $[BD]$.

EXERCICE 32

1. **a.** $\overrightarrow{AB}\left(2; \frac{4}{3}\right)$

   b. $\frac{4}{3}x - 2y + 2 = 0$
2. **a.** $\overrightarrow{u}\,(-2; 3)$

   b. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires.

   c. $N\left(\frac{6}{13}; \frac{17}{13}\right)$.
3. **a.** Les coordonnées de M vérifient l'équation de (Δ).

   b. $(\Delta) \perp (AB)$: on prouve que le triangle ANB est rectangle en N. Le calcul des distances aboutit à $AN = \frac{19\sqrt{13}}{39}$; $BN = \frac{7\sqrt{13}}{39}$; $AB = \frac{2\sqrt{13}}{3}$.

   On a $AN^2 + BN^2 = AB^2$: le triangle ANB est donc rectangle en N d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

EXERCICE 33

1. **a.** Elles semblent sécantes.

   b. $\mathcal{S} = \{(1; 3)\}$.

   c. Les deux droites sont sécantes au point de coordonnées $(1; 3)$.
2. **a.** On peut calculer le déterminant des deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(-6; 2)$ et $\overrightarrow{u'}(9; -3)$.

   On obtient : $det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}) = -6 \times (-3) - 2 \times 9 = 0$. Ces deux vecteurs sont donc colinéaires et les droites sont donc parallèles (ou confondues). Leurs équations réduites étant différentes, elles ne sont pas confondues et sont donc strictement parallèles.

   b. Même démarche. Le déterminant est à nouveau nul. Cette fois-ci, les équations réduites sont identiques, donc les droites sont confondues.

Exercice 34:

Soit x l'âge de la fille du professeur et y l'âge du professeur.

D'après l'énoncé : y = $2x$. Dans 12 ans : y + 12 = 3(x + 12).

On résout le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} y = 9x \\ y + 12 = 3(x + 12) \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} y = 9x \\ 9x + 12 = 3x + 36 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} y = 9x \\ 6x = 24 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} y = 9 \times 4 = 36 \\ x = 4 \end{cases}$$

Ainsi le professeur a 36 ans et sa fille 4 ans.

9 Vecteurs

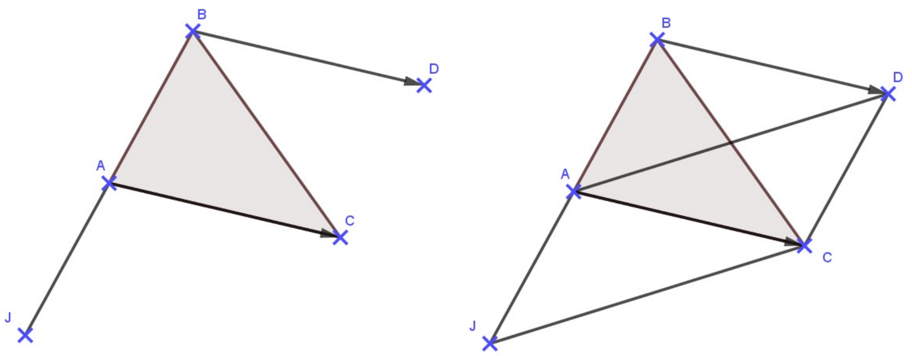
Exercice 35

Questionnaire à Choix Multiple.

1). Réponses b), d). **2).** Réponses a), d). **3).** Réponse b). **4).** Réponse d). **5).** Réponse a).
6). Réponse c). **7).** Réponse d). **8).** Réponses a), b). **9).** Réponses a), c). **10).** Réponses a), c).

Exercice 36 :

1).



2). a). On sait que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, donc BDCA est un parallélogramme. On en déduit que que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$.

De plus, A est le milieu de [BJ]. Donc que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AJ}$. Par conséquent : <u>$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AJ}$.</u>

b). Comme $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AJ}$, on peut affirmer que <u>DCJA est un parallélogramme</u>.

Exercice 37 : Dans un repère, on donne les points A(-1 ; 3), B(7 ; -1), C(5 ; 0), D(4 ; 2) et E(0 ; 4).

1). $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+1 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+1 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On remarque que -3×8 = -4×6 (= -24), donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont proportionnelles. Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et <u>les points A, B et C sont alignés</u>.

2). $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On remarque que -4×(-4) = 8×2 (= 16), donc les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont proportionnelles. Ainsi $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et <u>les droites (AB) et (DE) sont parallèles</u>.

EXERCICE 38

1. $\overrightarrow{AB}(1,1;0,3)$ et $\overrightarrow{CD}(-1,8;-0,5)$.

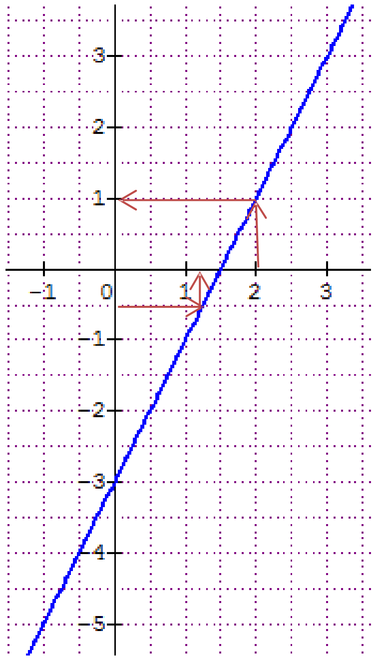
2. $det\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = 1,1 \times (-0,5) - 0,3 \times (-1,8) = -0,01 \neq 0$. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

3. Le quadrilatère n'est pas un trapèze.

10 Fonctions

Exercice 39 :

On considère la fonction affine f définie par f(x) = 2x – 3. Sa représentation graphique est donnée ci-contre.



1) a) Déterminer graphiquement l'image de 2 par f.

L'image de 2 est 1 ou **f(2) = 1**

b) Retrouver ce résultat par le calcul.

f(2) = 2 × 2 – 3 = **1.**

2) a) Déterminer graphiquement l'antécédent par f de –0,5.

L'antécédent de -0,5 est environ **1,2.**

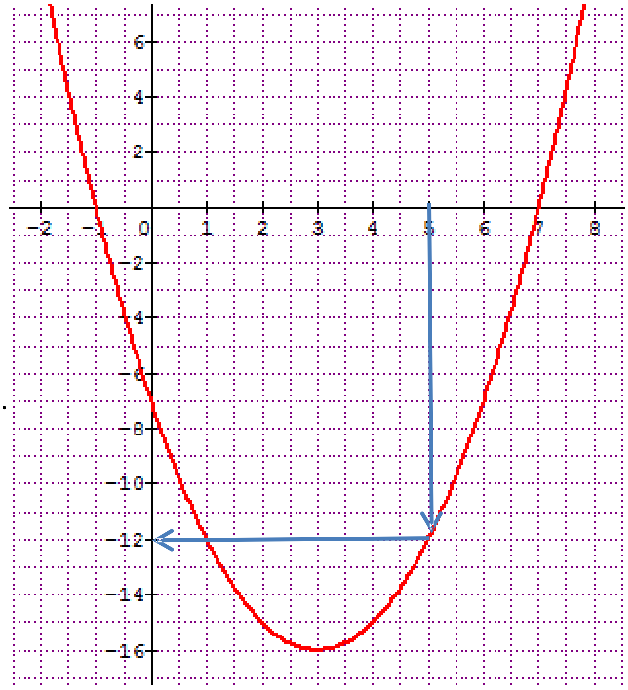
b) Retrouver ce résultat par le calcul.

On cherche x tel que f(x) = -0,5

⇔ 2x – 3 = -0,5 ⇔ 2x = 2,5 ⇔ **x = 1,25.**

Exercice 40

On considère la fonction f définie par f(x) = $x^2 - 6x - 7$. Sa représentation graphique est donnée ci-contre.



1) a) Déterminer graphiquement l'image par f de 5.

f(5) = **-12.**

b) Retrouver ce résultat par le calcul.

f(5) = 5² – 6 × 5 – 7 = **-12.**

2) a) Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f .

Les antécédents de 0 sont **-1 et 7.**

b) Montrer que f(x) = (x – 3)² – 16 .

On a : $(x-3)^2 - 16 = x^2 - 6x + 9 - 16 = x^2 - 6x - 7$.

Donc **f(x) = (x – 3)² – 16 .**

c) Déterminer algébriquement les antécédents de 0.

On cherche x tel que f(x) 0

⇔ $(x-3)^2 - 16 = 0$

⇔ $(x-3-4)(x-3+4) = 0$

⇔ $(x-7)(x+1) = 0$

⇔ **x = 7 ou x = -1 .**

3) Donner le tableau de variation de la fonction f.

x	- ∞	3	+ ∞
f(x)	↘	-16	↗

4) Donner le tableau de signes de la fonction f.

x	- ∞		-1		7		+ ∞
$x^2 + x - 6$		+	0	-	0	+	

5) a) Déterminer graphiquement les antécédents de 2 par f.
Les antécédents de 0 sont **-1,3 et 7,2**.

b) Déterminer algébriquement les antécédents de 2 par f.
On cherche x tel que f(x) = 2

$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 16 = 2 \Leftrightarrow$
$(x-3)^2 - 18 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 3 - \sqrt{18})(x - 3 + \sqrt{18}) = 0$
$\Leftrightarrow$ **$x = 3 + 3\sqrt{2}$ ou $x = 3 - 3\sqrt{2}$.**

6. $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]6; +\infty[$.
7. $f(x) \leqslant g(x)$: $\mathcal{S} = [1; 6]$.

Exercice 41 : Avec logiciel

On considère les deux algorithmes donnés ci-contre.

Algorithme A	Algorithme B
Variables :	Variables :
x, a, b, c : réels ;	x, a, b, c : réels ;
Début	Début
Entrer(x) ;	Entrer(x) ;
$a \leftarrow x^2$;	$a \leftarrow x - 3$;
$b \leftarrow (-6) \times x$;	$b \leftarrow a^2$;
$c \leftarrow a + b + 8$;	$c \leftarrow b - 1$;
Afficher(c) ;	Afficher(c) ;
Fin.	Fin.

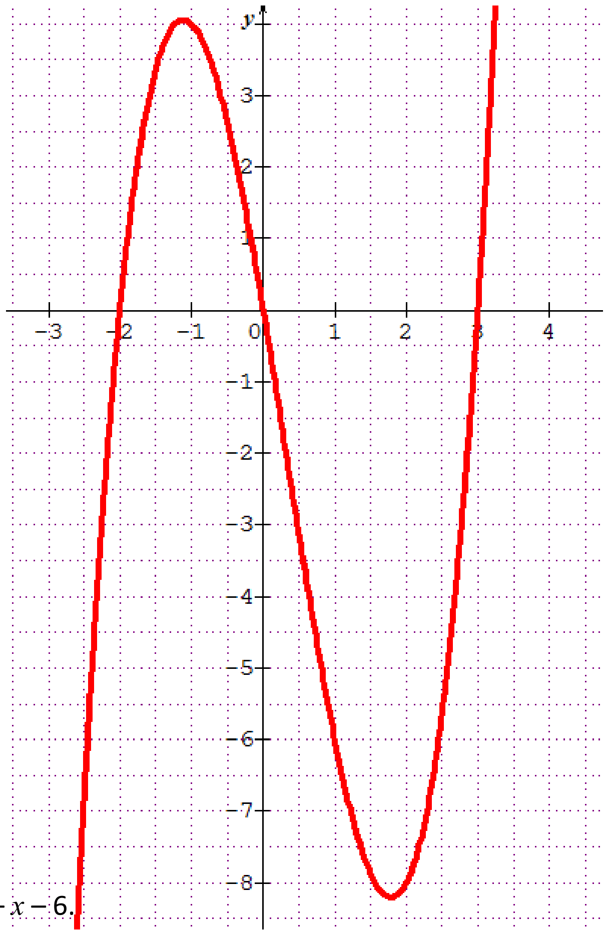
1) Programmer ces deux algorithmes sur votre calculatrice.
Les tester sur quelques nombres.

2) Quelle conjecture pouvez-vous formuler ? La démontrer.
On conjecture que les deux algorithmes sont égaux.
Algorithme A : c = $x^2 - 6x + 8$
Algorithme A : c = $(x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$

3) Quels nombres doit-on entrer pour obtenir 48 comme résultat ? (Résolution algébrique attendue).
On résout c = 48 $\Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 = 48$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 = 49 \Leftrightarrow x - 3 = 7$ ou $x - 3 = -7 \Leftrightarrow x = 10$ ou $x = -4$

Exercice 42

On considère la fonction f définie par f(x) = $x^3 - x^2 - 6x$. Sa représentation graphique est donnée ci-contre.



1) a) Déterminer graphiquement l'image par f de $\frac{-3}{2}$.

$f(\frac{-3}{2}) \approx 3$

b) Retrouver ce résultat par le calcul.
$f(\frac{-3}{2}) = (\frac{-3}{2})^3 - (\frac{-3}{2})^2 - 6 \times \frac{-3}{2} = \frac{-27}{8} - \frac{9}{4} + 9 = \mathbf{\frac{27}{8}}$

2) a) Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f.
Les antécédents de 0 sont **-2 , 0 et 3**.

b) Développer $(x-3)(x+2)$. $(x-3)(x+2) = x^2 - x - 6$.

En déduire une factorisation de la fonction f.

$f(x) = x(x^2 - x - 6) =$ **$x(x-3)(x+2)$.**

c) Déterminer algébriquement les antécédents de 0.

On résout $f(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$ **$x = 0$ ou $x = 3$ ou $x = -2$.**

3) Donner le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		$-1{,}2$		$1{,}8$		$+\infty$
$f(x)$		↗	4	↘	$-8{,}2$	↗	

4) En utilisant la factorisation trouvée en 2 b), donner le tableau de signes de la fonction f.

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
x		-		-	0	+		+	
$x - 3$		-		-		-	0	+	
$x + 2$		-	0	+		+		+	
P(x)		-	0	+	0	-	0	+	

5) a) Déterminer graphiquement les antécédents de – 6 par f.

Les antécédents de -6 sont **-2,5 , 1 et 2,5.**

b) Factoriser $x^3 - x^2$ et $-6x + 6$. $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ et $-6x + 6 = -6(x-1)$

c) Déterminer algébriquement les antécédents de -6.

On utilisera les factorisations trouvées en 5 b).

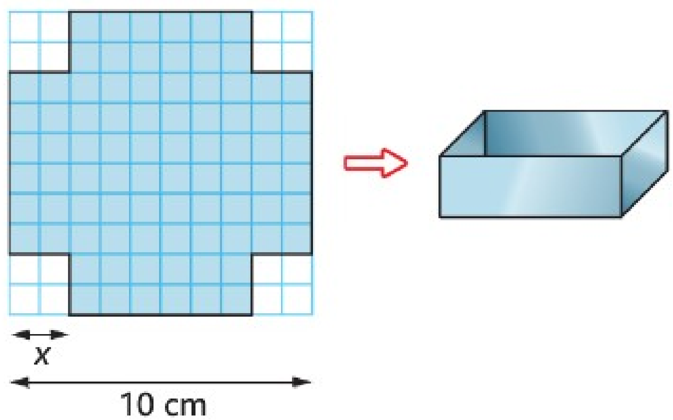
$f(x) = -6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x = -6 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) - 6(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-6) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) = 0$

Les antécédents de -6 sont **1 ; $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.**

Exercice 43

On dispose d'un carré de métal de 10 cm de côté.
Pour fabriquer une boîte sans couvercle,
on enlève à chaque coin un carré de côté x cm
on relève les bords pour obtenir un pavé droit.



1) Donner un intervalle pour la variable x.

$x \in [0; 5]$

2) Déterminer le volume $V(x)$ de la boîte.

$V(x) = x(10-2x)^2 = x(100 - 40x + 4x^2) =$ **$4x^3 - 40x^2 + 100x$.**

3) Utiliser la calculatrice pour déterminer le volume maximal et la valeur de x correspondante (On arrondira au dixième).

Le maximum est **74,1 cm^3 pour x $\approx$ 1,7 cm.**

1.

x	-6		-1		3		8
$f(x)$	10	↘	4	↗	7	↘	-2

2. a. Vrai

b. $f(x) = 5$ a trois solutions ; $f(x) = 0$ a une solution ; $f(x) = -3$ n'a pas de solution.

3. a. Vrai

b. $f(-0,5) < f(2)$; $f(-5) < f(-5,1)$; on ne peut pas comparer $f(2)$ et $f(3,5)$.

11 Pourcentages et Statistiques

Exercice 45

1. Les équipes médianes sont Bourgoin et Colomiers (8^e et 9^e équipe).
2. On considère la liste statistique ordonnée des points marqués :
   - $Q_1 = 53$ (4^e valeur)
   - $Q_2 = 66,5$
   - $Q_3 = 88$ (12^e valeur)
3. Soit x le score de Lyon en 2013. On a $117 = 1,80x$ d'où $\boldsymbol{x = 65}$ **points**
4. Soit x' le score d'Aurillac en 2013. On a $59 = 0,7867x'$ d'où $\boldsymbol{x' = 75}$ **points**
5. Aurillac était cinquième

Exercice 46

Remarquons qu'il y a 30 matches au total

1. Moyenne **m = 1,63**
2.

nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
effectif :	**6**	**8**	**10**	**4**	**1**	**1**
fréquence (%) :	20	27	33	13	3	3
Effectifs cumulés croissants :	**6**	14	24	28	29	30

3. $\boldsymbol{m_e = 2}$; Aurillac a inscrit deux essais ou moins la moitié de la saison. Aurillac a inscrit au moins deux essais la moitié de la saison.
4. $\boldsymbol{Q_1 = 1}$ (8^e valeur) et $\boldsymbol{Q_3 = 2}$ (23^e valeur)
5. En B3 : **=B2*100/30**
   En C4 : **=B4+C2**

Exercice 47

<table>
<tr><th>Question n°</th><th colspan="7">Énoncé</th><th>Réponse</th></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="7">Kévin reçoit 40€ d'argent de poche par mois. En 2020, il a dépensé 180€ en jeux vidéos. Exprimer, en pourcentage, la part de cette dépense dans son budget annuel.</td><td>37,5 %</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="7">En 2020, une startup réalise un chiffre d'affaire annuel de 40 000€ et a pour objectif une progression annuelle de 5% chaque année pendant trois ans. Quel est l'objectif pour 2023 ?</td><td>46 305 €</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="7">Le film « Le seigneur des anneaux – le retour du roi » dure 263 minutes en version longue. C'est 31% de plus que la version courte. Donner la durée de la version courte, exprimée en heures/minutes.</td><td>3 h 30 min 46 s</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="7">Dans un centre culturel, les disques représentent 28% des ventes. Parmi eux, on vend 5% de vinyles. Quelle est la part des ventes de vinyles dans les ventes totales du magasin ?</td><td>1,4 %</td></tr>
<tr><td>5</td><td colspan="7">Un manteau soldé 20% coûte dorénavant 105,60€. Quel était son prix initial ?</td><td>132 €</td></tr>
<tr><td>7</td><td colspan="7">Un sac contient 11 jetons rouges, 3 jetons bleus et 6 jetons verts. Déterminer, en pourcentage, la proportion de jetons verts dans le sac.</td><td>30 %</td></tr>
<tr><td>8</td><td colspan="7">Une ville a perdu 10% de ses habitants entre 2019 et 2020 mais en a ensuite gagné 14% entre 2020 et 2021. Calculer le coefficient multiplicateur entre 2019 et 2021.</td><td>1,026</td></tr>
<tr><td>9</td><td colspan="7">Les moyennes générales de Nathan et Sophie ont évolué entre le premier et le second trimestre : celle de Nathan passe de 17,3 à 18,3 et celle de Sophie passe de 12 à 12,8. Qui a le plus progressé ?</td><td>Sophie</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="7">Un plombier facture une intervention 80€ Hors Taxe (taux de TVA intermédiaire). Quel est le coût pour le client ?</td><td>88 €</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="7">Un téléviseur 4K est vendu 540€ (taux de TVA classique). Quel est son prix hors taxes ?</td><td>450 €</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="7">

Dans ce tableau créé avec le menu « stats » de la calculatrice, les valeurs du caractère étudié sont entrées en L_1 et leurs effectifs en L_2. Déterminer la moyenne, les quartiles et l'écart type de la série statistique.</td><td>Moyenne : 12,65
$Q_1 = 9$ $Q_3 = 14$
Med = 12
Ecart-type : 3,48</td></tr>
<tr><td>13</td><td colspan="7">Deux artisans – fromagers produisent des petits « Rocamadour » dont la masse doit être égale à 30g.
On prélève pour chacun un échantillon de fromages dont on relève les masses en g :
A : 28 – 28 – 29 – 30 – 31 – 34
B : 27 – 28 – 29 – 30 – 30 – 30 – 32 – 34
Quel échantillon est le plus homogène ?</td><td>B</td></tr>
<tr><td rowspan="3">14</td><td colspan="7">On interroge des adolescents sur le temps qu'ils consacrent chaque week end à visionner des vidéos sportives sur Internet. On donne le tableau ci – dessous.
Déterminer la moyenne, l'écart type, les quartiles de la série ; puis la proportion d'adolescents qui consacrent au moins 1h à cette activité (en %).</td><td rowspan="3">Moyenne : 1,25
$Q_1 = 0,5$ $Q_3 = 2$
Med = 1
Ecart-type : 0,9
Proportion : 70 %</td></tr>
<tr><td>Temps (h)</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Nb. d'adolescents</td><td>8</td><td>4</td><td>10</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td></tr>
</table>

12 Probabilités

Exercice 48

1. 1/3
2. 1/6
3. N'obtenir aucun roi
4. 0,3
5. 0,5
6. 0,25
7. Environ 0,004 (1 / 2^8)

EXERCICE 49

1. Tableau complété :

	Biologique	Industriel	Total
Miel	270	333	603
Confiture	63	234	297
total	333	567	900

2. $P(\overline{M}) = \dfrac{297}{900}$

$P(B) = \dfrac{333}{900}$

$P(M \cap \overline{B}) = \dfrac{333}{900}$

$P(M \cup \overline{B}) = P(M) + P(\overline{B}) - P(M \cap \overline{B}) = \dfrac{837}{900}$.

3. $p = \dfrac{63}{333}$.

Problème de probabilités

1/

a.

Nature vetement	Jupes	Chemisiers	Gilets	Total
Probabilité	2/7	3/7	2/7	1

b.

Couleur vetement	Bleu	Noir	Jaune	Marron	Total
Probabilité	3/7	2/7	1/7	1/7	1

2/

a. p(A)=2/7 et p(B) = 3/7

A∩B : « le vêtement est une jupe bleue » et p(A∩B) =1/7

A∪B : « le vêtement est une jupe bleue » et p(A∪B) =4/7

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 5/7$

$p(\bar{A} \cap B) = 2/7$ (le vêtement n'est pas une jupe et il est bleu)

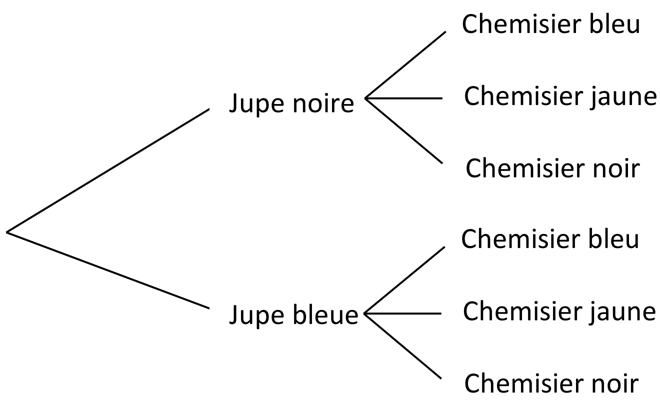
b. $\overline{\bar{A} \cup B}$ et $A \cap \bar{B}$ sont des évènements identiques (le vêtement n'est ni une jupe, ni bleu)

3/

a. On lance le dé : si le chiffre est impair, Julie prend une jupe noire ; si le chiffre est pair, Julie prend une jupe bleue
b. On lance le dé : si 1 ou 2, elle prend le chemisier bleu ; si 3 ou 4, chemisier jaune ; si 5 ou 6, chemisier noir

4/

a.



b.

p(A) = 2/6 = 1/3

p(B) = 4/12 = 1/3

p(C) = 1/12

c. Il y a l'embarras du choix !

D : « Au moins deux vêtements sont de la même couleur »

E : « Le chemisier est jaune »

13 Algorithmique

Exercice 50

1. Chloé : 120 ; Laura : 5 ; Thibault : 0 et Thomas : 1 1 2 6 24
2. 5 ! = 120, Chloé a raison
3. Reprendre l'algorithme de Thibault et remplacer 5 par 1000 et « P x i » par « P + i »

EXERCICE 51

Le programme 2 comporte une erreur : la boucle while ne s'arrête jamais car on initialise la variable A à 100, puis A augmente de 5 à chaque passage dans la boucle. La condition $A > 10$ ne sera donc jamais réalisée.

EXERCICE 52

$A = 9$ et $B = 5$.

EXERCICE 53

1. Tableau d'exécution :

A	C
31	0
22	1
13	2
4	3

Exercice 54

```
saisir a
saisir n
p←1
pour k allant de 1 à n :
        p ← ..pxa......
Afficher (« a puissance n est égal à », p)
```

Exercice 55

```
A←..100 000.........
M←0
Tant que ..A<1 000 000........ :
        A ← ..Ax1,10...
        M ← ..M+1......
Fin du tant que
Afficher (« Il a fallu », M, « mois »)
```

Exercice 56

```
definir absolue (x) :
Si x< 0
        alors retourner ..-x.
        sinon retourner ..x..
Fin du si
```